INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATIQUE

Stabilisation d'une équation de vibrations

Boumediène Chentouf , Cheng-Zhong Xu et Gauthier Sallet

N° 3085

Janvier 1997

THÈME 4

Rapport de recherche

ISSN 0249-6399

Stabilisation d'une équation de vibrations

Boumediène Chentouf , Cheng-Zhong Xu et Gauthier Sallet

Thème 4 — Simulation et optimisation
de systèmes complexes
Projet Congé

Rapport de recherche n° 3085 — Janvier 1997 — 19 pages

Résumé : Cet article traite la stabilisation frontière d'une équation de vibrations. On démontre que le système peut être stabilisé fortement ou exponentiellement par des feedbacks frontières non linéaires.

Mots-clé : Contrôle non lineaire, Système en boucle fermé, Semi-groupe de contractions non linéaire, Stabilité forte, Principe d'invariance de Lasalle, Stabilité exponentielle, Multiplicateur.

(Abstract: pto)

INRIA-Lorraine (projet Congé) & URA CNRS 399 (MMAS)
ISGMP, Bât. A, Université de Metz, Ile de Saulcy
57045 Metz cedex 01
tél. : 03 87 31 54 14 – fax : 03 87 54 72 77
e-mail : {chentouf — xu — sallet}@saulcy.loria.fr

Unité de recherche INRIA Lorraine
Technopôle de Nancy-Brabois, Campus scientifique,
615 rue de Jardin Botanique, BP 101, 54600 VILLERS LÈS NANCY (France)
Téléphone : (33) 83 59 30 30 – Télécopie : (33) 83 27 83 19
Antenne de Metz, technopôle de Metz 2000, 4 rue Marconi, 55070 METZ
Téléphone : (33) 87 20 35 00 – Télécopie : (33) 87 76 39 77

Stabilization of a vibrating equation

Abstract: This paper deals with boundary stabilisation of a vibrating equation. It is proved that the system can be strongly or exponentially stabilized by general dissipative non linear boundary feedback of velocity.

Key-words: Nonlinear control, Closed-loop system, Nonlinear contractions semi-group, Asymptotic stability, Lasalle's invariance principle, Exponential stability, Multiplier.

1 Introduction et résultats principaux:

On considère dans cette note l'équation suivante:

$$\left\{\begin{array}{lll} y_{tt}(x,t) - (ay_x)_x(x,t) + \alpha y_t(x,t) + \beta y(x,t) = 0, \quad (*) & 0 < x < 1, \ t > 0, \\ (ay_x)(0,t) = \epsilon_1 U_1(t), & t > 0, \\ (ay_x)(1,t) = \epsilon_2 U_2(t), & t > 0. \end{array}\right. \tag{1.1}$$

où

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha \ \geq 0, \ \ \beta > 0, \\ \epsilon_1, \epsilon_2 \in (0,+\infty) \ \text{ non simultanément nulles,} \\ a \in W^{1,\infty}(0,1) \ \text{ telle } a(x) \geq a_0 > 0 \ \text{ pour tout } \ x \in [0,1]. \end{array}\right. \tag{1.2}$$

De plus, U_1 et U_2 sont deux lois de feedbacks à déterminer telles que le système en boucle fermé soit asymptotiquement stable, i.e,

$$(y(.,t), y_t(.,t)) \longrightarrow 0, \qquad \text{lorsque } \ t \longrightarrow +\infty$$

dans un certain espace fonctionnel.
Il est important de noter que si $\beta = 0$ et si les lois de feedbacks dépendent seulement de la vitesse, alors le système en boucle fermé n'est pas bien posé au sens des semi-groupes dans l'espace $H_0^1(0,1) \times L^2(0,1)$ où

$$H_0^m(0,1) = \left\{ f \in H^m(0,1); \int_0^1 f(x)dx = 0 \right\} \qquad \text{pour tout } m = 1, 2, ...$$

En effet, prenons $U_1(t) = ky_t(0,t), U_2(t) = -ky_t(1,t)$ et considérons le système suivant:

$$\left\{\begin{array}{ll} y_{tt}(x,t) - y_{xx}(x,t) = 0, & 0 < x < 1, \ t > 0, \\ y_x(0,t) = ky_t(0,t), & t > 0, \\ y_x(1,t) = -ky_t(1,t), & t > 0. \end{array}\right.$$

Soit l'opérateur linéaire $\tilde{A}$ défini par:

$$\mathcal{D}(\tilde{A}) = \left\{(y,z) \in H_0^2(0,1) \times H_0^1(0,1); \ y_x(0) = kz(0), \ y_x(1) = -kz(1)\right\}$$
$$\tilde{A}(y,z) = (z, y_{xx}) \quad \text{pour tout } \ (y,z) \in \mathcal{D}(\tilde{A})$$

On munit $H_0^1(0,1) \times L^2(0,1)$ du produit scalaire suivant:

$$\langle (f_1, g_1), (f_2, g_2) \rangle = \int_0^1 f_{1x} f_{2x} + g_1 g_2 dx.$$

Il est facile de voir que l'opérateur $\tilde{A}$ est dissipatif.
Soit f et g deux fonctions définies sur (0,1) comme suit:

$$\left\{\begin{array}{l} f(x) = 6x^2 - 6x + 1, \\ g(x) = 1 - f(x). \end{array}\right.$$

On peut vérifier que $(f,g) \in H_0^1(0,1) \times L^2(0,1)$. Cependant il n'existe pas (y,z) dans $\mathcal{D}(\tilde{A})$ tel que $(I-\tilde{A})(y,z) = (f,g)$. Par conséquent, la condition de maximalité de l'opérateur $\tilde{A}$ n'est pas satisfaite.

Dans le cas où $\beta = 0$, le problème de stabilisation frontière de l'équation $(*)$ a été étudié par de nombreux auteurs.
Rao [12] a montré que la loi de feedback

$$\begin{cases} U_1(t) = \alpha y(0,t) + F(y_t(0,t)), \\ U_2(t) = -M y_{tt}(1,t), \quad M, \alpha > 0. \end{cases}$$

stabilise asymptotiquement le système par un choix approprié de F.
Un résultat de stabilisation a été aussi obtenu par Conrad et Rao [5] moyennant les feedbacks suivants:

$$\begin{cases} U_1(t) = \alpha y(0,t) + F(y_t(0,t)), \\ U_2(t) = -\alpha y(1,t) - F(y_t(1,t), \quad \alpha > 0. \end{cases}$$

Dans l'article [1], d'Andréa-Novel et al ont démontré que le système est asymptotiquement stabilisé par la loi de feedback

$$\begin{cases} U_1(t) = 0, \\ U_2(t) = -k_1 y(1,t) - h(y_t(1,t)). \end{cases}$$

avec $k_1 > 0$ et h étant proprement choisies. La stabilisation asymptotique du système a été démontré dans [8] et [3] par la loi suivante:

$$\begin{cases} U_1(t) = k_p y(0,t) + k_v y_t(0,t) + \displaystyle\int_0^1 G(x) y(x,t) dx + \frac{k_v}{k_p} \int_0^1 G(x) y_t(x,t) dx, \\ U_2(t) = 0. \end{cases}$$

avec k_p, $k_v > 0$ et $G(x)$ étant une fonction choisie dans $L^2(0,1)$.
Enfin, notons les résultats variés de Komornik [10] où il a traité la question de stabilisation dans des différents cas. On constate que les lois de feedbacks proposées ci-dessus contiennent non seulement un terme en vitesse mais aussi un terme linéaire de position.

Dans cette article, nous montrons que pour tout $\beta > 0$, l'équation $(*)$ peut être asymptotiquement stabilisée par les lois suivantes:

$$\begin{cases} U_1(t) = f(y_t(0,t)), \\ U_2(t) = g(y_t(1,t)). \end{cases} \tag{F}$$

avec f et g deux fonctions réelles bien choisies (voir l'hypothèse (H)).
La preuve est basée sur le Théorème de Lasalle [6], [9].
En distinguant le cas où $\alpha = 0$ et $\alpha \neq 0$, nous montrons -sous des conditions supplémentaires sur f et g- que le système en boucle fermé est exponentiellement stable et cela par la méthode

du multiplicateur.
Considérons pour le système(1.1) l'énergie suivante

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^1 \beta y^2(x,t) + y_t^2(x,t) + a(x)y_x^2(x,t)dx.$$

En calculant formellement la différentielle de $E(t)$ suivant une trajectoire de (1.1), on obtient

$$E_t(t) = \epsilon_2 U_2(t) y_t(1,t) - \epsilon_1 U_1(t) y_t(0,t) - \alpha \int_0^1 y_t^2(x,t)dx. \tag{1.3}$$

Insérons la loi de feedback (F) dans l'expression ci-dessus; il s'en suit que

$$E_t(t) = \epsilon_2 y_t(1,t) g(y_t(1,t)) - \epsilon_1 y_t(0,t) f(y_t(0,t)) - \alpha \int_0^1 y_t^2(x,t)dx.$$

Pour rendre la fonction $E(t)$ décroissante, nous supposons dans la loi de feedback (F) que

$$\left\{\begin{array}{l} f \text{ est croissante continue telle que } f(0)=0,\ f(\eta)\eta > 0\ \forall \eta \neq 0, \\ g \text{ est décroissante continue telle que } g(0)=0,\ g(\eta)\eta < 0\ \forall \eta \neq 0. \end{array}\right. \tag{H}$$

Le système (1.1) en boucle fermée s'écrit:

$$\left\{\begin{array}{ll} y_{tt}(x,t) - (ay_x)_x(x,t) + \alpha y_t(x,t) + \beta y(x,t) = 0, & 0 < x < 1,\ t > 0, \\ (ay_x)(0,t) = \epsilon_1 f(y_t(0,t)), & t > 0, \\ (ay_x)(1,t) = \epsilon_2 g(y_t(1,t)), & t > 0. \\ \end{array}\right. \tag{1.4}$$

Considérons maintenant l'espace de Hilbert

$$\mathcal{H} = H^1(0,1) \times L^2(0,1),$$

muni du produit scalaire

$$\langle (f_1, g_1), (f_2, g_2) \rangle_{\mathcal{H}} = \int_0^1 a f_{1x} f_{2x} + \beta f_1 f_2 + g_1 g_2\, dx.$$

Avec des conditions intiales $\phi = (\phi_1, \phi_2)$, le système en boucle fermé (1.4) peut se mettre sous la forme d'équation d'évolution

$$\left\{\begin{array}{l} \dot{\Phi}(t) + A\Phi(t) = 0, \\ \Phi(0) = \phi. \end{array}\right. \tag{Σ}$$

où $\Phi(t) = (y(.,t), y_t(.,t))$, A est un opérateur non borné tel que

$$\mathcal{D}(A) = \left\{ (y,z); y \in H^2(0,1),\ \ z \in H^1(0,1),\quad \begin{array}{l} (ay_x)(0) = \epsilon_1 f(z(0)) \\ (ay_x)(1) = \epsilon_2 g(z(1)) \end{array} \right\},$$

et pour tout $(y,z) \in \mathcal{D}(A)$

$$A(y,z)(x) = (-z, -(ay_x)_x + \beta y + \alpha z)\,.$$

On suppose dans la suite que les hypothèses (1.2) et (H) sont satisfaites. La proposition suivante peut être démontrée à partir de la théorie de Brezis [2].

Proposition 1 *: i) Pour toute condition initiale $(\phi_1, \phi_2) \in \mathcal{D}(A)$, le système (Σ) admet une solution forte unique $(y,z) \in \mathcal{D}(A)$ donnée par*

$$(y,z) = S(t)(\phi_1, \phi_2), \quad \forall t \geq 0$$

où $S(t)$ est le semi-groupe de contractions engendré par l'opérateur A. De plus,

$$\frac{d}{dt}(y,z) \in L^\infty(\mathbb{R}^+; \mathcal{H}).$$

ii) Pour toute condition initiale $(\phi_1, \phi_2) \in \mathcal{D}(A)$, la fonction

$$t \longmapsto ||(y,z)||_{\mathcal{D}(A)}$$

est décroissante, où $||(y,z)||_{\mathcal{D}(A)} = ||A(y,z)||_{\mathcal{H}}$ pour tout $(y,z) \in \mathcal{D}(A)$.

iii) Pour toute condition initiale $(\phi_1, \phi_2) \in \mathcal{H}$, le système (Σ) admet une solution faible unique $(y,z) \in \mathcal{H}$ telle que:

$$(y,z) \in C^0(\mathbb{R}^+; \mathcal{H}).$$

Nos résultas principaux sont énoncés dans les théorèmes suivants:

Théorème 1 *: Pour toute donnée initiale (ϕ_1, ϕ_2) dans $\mathcal{H}$, la solution $\Phi(t) = (y,z)$ de (Σ) tend asymptotiquement vers zéro dans $\mathcal{H}$ lorsque t tend vers $+\infty$*

Théorème 2 *: Soit (y,z) la solution de (Σ) issue de la condition initiale (ϕ_1, ϕ_2) dans $\mathcal{H}$. On suppose l'existence de quatre constantes positives k_1, k_2, k_3 et k_4 telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$*

$$k_1 \mid x \mid \leq \mid f(x) \mid \leq k_2 \mid x \mid, \qquad k_3 \mid x \mid \leq \mid g(x) \mid \leq k_4 \mid x \mid\,. \tag{H^+}$$

Si $\alpha = 0$ et si $a(x)$ est monotone, alors il existe une constante $\omega > 0$ telle que

$$||\,(y,z)\,||_{\mathcal{H}} \leq \exp(1 - \frac{t}{\omega})||(\phi_1, \phi_2)||_{\mathcal{H}}, \qquad \forall t \geq \omega.$$

Théorème 3 *: Soit (y,z) la solution de (Σ) issue de la condition initiale (ϕ_1, ϕ_2) dans $\mathcal{H}$. Supposons que $\alpha > 0$ et que l'hypothèse (H^+) est satisfaite; il existe alors une constante $\omega^* > 0$ telle que*

$$||\,(y,z)\,||_{\mathcal{H}} \leq \exp(1 - \frac{t}{\omega^*})||(\phi_1, \phi_2)||_{\mathcal{H}}, \qquad \forall t \geq \omega^*.$$

2 Preuves des résultats:

Démontrons d'abord le lemme suivant.

Lemme 1 *: L'opérateur A est maximal monotone.*

Preuve: soit $(y,z),(\hat{y},\hat{z})\in\mathcal{D}(A)$. Un simple calcul permet d'obtenir l'expression suivante:

$$\langle\, A(y,z)-A(\hat{y},\hat{z}),(y,z)-(\hat{y},\hat{z})\,\rangle_{\mathcal{H}}$$

$$= -\epsilon_2\,(z(1)-\hat{z}(1)\,)\,(\,g(z(1))-g(\hat{z}(1))\,)+\epsilon_1\,(z(0)-\hat{z}(0))\,(\,f(z(0))-f(\hat{z}(0)\,))$$

$$+\,\alpha\int_0^1 (z-\hat{z})^2\,dx.$$

La monotonie de A est alors une conséquence directe des hypothèses (1.2) et (H).

Il s'agit maintenant de démontrer la maximalité de A, i.e, $\mathrm{Im}(I+A)=\mathcal{H}$.
Soit

$$(U,V)\in\mathcal{H}. \tag{2.1}$$

On cherche $(y,z)\in\mathcal{D}(A)$ tel que:

$$(I+A)(y,z)=(U,V).$$

Ce qui est équivalent à résoudre le système suivant:

$$\begin{cases} y-z=U,\\ z-(ay_x)_x+\alpha z+\beta y=V,\\ (ay_x)\,(0)=\epsilon_1 f(z(0)),\\ (ay_x)\,(1)=\epsilon_2 g(z(1)),\\ y\in H^2(0,1), z\in H^1(0,1). \end{cases} \tag{2.2}$$

En éliminant z dans la première équation de (2.2), on a:

$$\begin{cases} (\alpha+\beta+1)y-(ay_x)_x=(\alpha+1)U+V,\\ (ay_x)\,(0)=\epsilon_1 f(y(0)-U(0)),\\ (ay_x)\,(1)=\epsilon_2 g(y(1)-U(1)),\\ y\in H^2(0,1). \end{cases} \tag{2.3}$$

On définit la fonctionnelle J par:

$$\begin{aligned} J: H^1(0,1) &\longrightarrow \mathbb{R}\\ \psi &\longmapsto J(\psi) \end{aligned}$$

avec

$$J(\psi)=\frac{1}{2}\int_0^1 [a\psi_x^2+(\alpha+\beta+1)\psi^2]\,dx-\int_0^1 [(\alpha+1)U+V]\,\psi\,dx$$
$$+F(\psi(0)-U(0))-G(\psi(1)-U(1)),$$

où

$$F(x)=\epsilon_1\int_0^x f(\xi)d\xi \quad \text{et} \quad G(x)=\epsilon_2\int_0^x g(\xi)d\xi, \qquad \forall x\in\mathbb{R}. \tag{2.4}$$

On déduit de (H) et (2.4) que:
i)F est convexe, $F\in C^1(\mathbb{R})$ et $F(x)\geq 0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$.

ii)$-G$ est convexe, $G\in C^1(\mathbb{R})$ et $G(x)\leq 0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$.

iii)J est une fonctionnelle convexe, coercive et continue dans $H^1(0,1)$.

D'aprés un théorème de minimisation [13], il existe $y\in H^1(0,1)$ telle que

$$J(y)=\inf_{\psi\in H^1(0,1)} J(\psi).$$

Autrement dit la fonction

$$\Theta:\lambda\longrightarrow\Theta(\lambda)=J(y+\lambda\psi)$$

admet un minimum en $\lambda=0$. Ceci implique que pour tout $\psi\in H^1(0,1)$

$$\frac{d}{d\lambda}\left(J(y+\lambda\psi)\right)|_{\lambda=0}=0.$$

Donc y vérifie le système (2.3) au sens faible, i.e,

$$\begin{aligned}&(\alpha+\beta+1)\int_0^1 y\psi\,dx+\int_0^1 ay_x\psi_x\,dx-\int_0^1 [(\alpha+1)U+V]\,\psi\,dx\\&+\epsilon_1\psi(0)\,f(y(0)-U(0))-\epsilon_2\psi(1)\,g(y(1)-U(1))=0.\end{aligned} \tag{2.5}$$

En particulier, pour tout $\psi\in C_0^\infty(0,1)$

$$-\int_0^1 ay_x\psi_x\,dx=\int_0^1 [(\alpha+\beta+1)y-(\alpha+1)U+V]\,\psi\,dx. \tag{2.6}$$

Il découle de (2.6) que

$$\begin{cases} y\in H^2(0,1),\\ (\alpha+\beta+1)y-(ay_x)_x=(\alpha+1)U+V.\end{cases} \tag{2.7}$$

En faisant une intégration par partie dans (2.5), on obtient grâce à (2.7) les conditions frontières

$$\begin{cases} (ay_x)(0)=\epsilon_1 f(y(0)-U(0)),\\ (ay_x)(1)=\epsilon_2 g(y(1)-U(1)).\end{cases} \tag{2.8}$$

En combinant (2.1), (2.7) et (2.8), on en déduit que y est solution de (2.3) et que l'élément $z = y - U \in H^1(0,1)$. Ainsi (y,z) vérifie (2.2). L'opérateur $(I+A)$ est donc surjective. La preuve du Lemme 1 est complète.

Remarque 1 *: La densité du domaine $\mathcal{D}(A)$ dans $\mathcal{H}$ est due au fait que A est maximal monotone et que $f(0) = g(0) = 0$.*

Preuve du Théorème 1: Comme $\mathcal{D}(A)$ est dense dans $\mathcal{H}$ et que $S(t)$ est un semi-groupe de contractions, il suffit de démontrer le résultat pour toute donnée initiale dans $\mathcal{D}(A)$. Soit $(\phi_1, \phi_2) \in \mathcal{D}(A)$. D'après la Proposition 1, la trajectoire des solutions $\{(y,z)\}_{t\geq 0}$ est bornée pour la norme du graphe. De plus, il est facile de voir que l'injection $i : \mathcal{D}(A) \longrightarrow \mathcal{H}$ est compacte et par conséquent la trajectoire est précompacte dans $\mathcal{H}$.
D'après le principe d'invariance de Lasalle [6], on peut affirmer que l'ensemble ω-limite $\omega\,(\phi_1,\phi_2)$ est un compact non vide invariant par le semi-groupe $S(t)$ et que plus

$$S(t)\,(\phi_1,\phi_2) \longrightarrow \omega\,(\phi_1,\phi_2) \qquad \text{quand } t \to +\infty.$$

Pour démontrer la stabilité asymptotique, il nous suffit de vérifier que $\omega\,(\phi_1,\phi_2)$ est réduit à $\{0\}$ [9].
Pour cela, prenons $(\tilde{\phi}_1, \tilde{\phi}_2) \in \omega\,(\phi_1,\phi_2)$. En vertu de la Proposition 1, l'élément $(\tilde{y},\tilde{z})$ défini par:

$$(\tilde{y},\tilde{z}) = S(t)(\tilde{\phi}_1,\tilde{\phi}_2) \subset \omega\,(\phi_1,\phi_2) \subset \mathcal{D}(A)$$

est une solution au sens fort du système (Σ). D'autre part, $||S(t)(\tilde{\phi}_1,\tilde{\phi}_2)||_{\mathcal{H}} = ||(\tilde{y},\tilde{z})||_{\mathcal{H}}$ est une constante [7].
Donc

$$\frac{d}{dt}||(\tilde{y},\tilde{z})||^2_{\mathcal{H}} = 0.$$

Ce qui est équivalent à dire que

$$\langle\, A(\tilde{y},\tilde{z}), (\tilde{y},\tilde{z})\,\rangle_{\mathcal{H}} = 0. \tag{2.9}$$

Or

$$\begin{aligned} \langle\, A(\tilde{y},\tilde{z}), (\tilde{y},\tilde{z})\,\rangle_{\mathcal{H}} &= \epsilon_1\,(\tilde{z}(0)) \cdot f\,(\tilde{z}(0)) \\ &- \epsilon_2\,(\tilde{z}(1)) \cdot g\,(\tilde{z}(1)) + \alpha||\,\tilde{y}\,||^2_{L^2(0,1)}. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Supposons, sans perte de généralité, que $\epsilon_1\epsilon_2 \neq 0$. Il suit de (1.2), (H) et (2.10) que $\tilde{y}$ est solution du système suivant:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \tilde{y}_{tt}(x,t) - (a\tilde{y}_x)_x\,(x,t) + \beta\tilde{y}(x,t) = 0, & 0 < x < 1,\ t > 0, \\ \tilde{y}_x(0,t) = \tilde{y}_x(1,t) = 0, & t > 0, \\ \tilde{y}_t(0,t) = \tilde{y}_t(1,t) = 0, & t > 0, \\ (\tilde{y}(0), \tilde{y}_t(0)) = (\tilde{\phi}_1,\tilde{\phi}_2) \in \omega\,(\phi_1,\phi_2)\,. & \end{array} \right. \tag{2.11}$$

Considérons l'opérateur linéaire A_0 défini par :

$$\mathcal{D}(A_0) = \left\{(y,z);\ y \in H^2(0,1),\ \ z \in H^1(0,1),\ \ y_x(0) = y_x(1) = 0\right\},$$

et pour tout $(y,z) \in \mathcal{D}(A_0)$

$$A(y,z)(x) = (z, (ay_x)_x - \beta y)\ .$$

Un nombre complexe μ est une valeur propre de A_0 si et seulement si il existe $(y,z) \in \mathcal{D}(A_0)$ non nul tel que $(\mu - A_0)(y,z) = 0$, i.e,

$$\begin{cases} \mu y = z, \\ (ay_x)_x - \beta y = \mu^2 y, \\ y_x(0) = y_x(1) = 0. \end{cases} \tag{2.12}$$

D'après un résultat classique de Mikhaïlov [11], le système spectral suivant

$$\begin{cases} (ay_x)_x - \beta y = \lambda y, \\ y_x(0) = y_x(1) = 0. \end{cases}$$

admet une infinité dénombrable de valeurs propres $0 > \lambda_1 > \lambda_2 > ......$, telles que $(\lambda_n) \longrightarrow -\infty$ quand $n \longrightarrow +\infty$ et les vecteurs propres correspondants $v_1, v_2, ...$ forment une base orthonormée de $L^2(0,1)$.
Par conséquent, les valeurs propres de A_0 sont:

$$\mu_n = \pm i\sqrt{-\lambda_n},$$

et les fonctions propres correspondantes sont

$$V_n^\star = \left(v_n,\ \pm i\sqrt{-\lambda_n}\ v_n\right),\ \ n = 1, 2, ..$$

On remarque que pour tout $n = 1, 2, ...$

$$\|\ V_n^\star\ \|_{\mathcal{H}}^2 = -2\lambda_n .$$

On prend alors $\begin{cases} V_n = \dfrac{1}{\sqrt{-2\lambda_n}}\left(v_n,\ -i\sqrt{-\lambda_n}\ v_n\right),\ n = 1, 2, ... \\ V_{-n} = \dfrac{1}{\sqrt{-2\lambda_n}}\left(v_n,\ i\sqrt{-\lambda_n}\ v_n\right),\ n = -1, -2, ... \end{cases}$

La solution de (2.11) est donnée par

$$(\tilde{y}, \tilde{y}_t)(t) = \sum_{n\in Z} C_n e^{-\mu_n t} V_n . \tag{2.13}$$

avec $C_n = \langle\, (\tilde{\phi}_1, \tilde{\phi}_2), V_n \,\rangle_{\mathcal{H}}, \quad$ pour tout $n \in Z$.
On peut aisément vérifier que

$$\begin{cases} C_n = a_n + ib_n, & n = 1, 2, ... \\ C_{-n} = a_{-n} - ib_{-n}, & n = -1, -2, ... \end{cases}$$

où

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{-2\lambda_n}} \int_0^1 a\tilde{\phi}_{1x} v_{nx} + \beta\tilde{\phi}_1 v_n \, dx \quad \text{et} \quad b_n = -\frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^1 \tilde{\phi}_2 v_n dx. \tag{2.14}$$

Après un simple calcul, on déduit de (2.13) et (2.14) que:

$$\begin{cases} \tilde{y}(t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \Big(a_n \cos(\sqrt{-\lambda_n} t) - b_n \sin(\sqrt{-\lambda_n} t) \Big) \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{-\lambda_n}} v_n, \\ \tilde{y}_t(t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \Big(a_n \sin(\sqrt{-\lambda_n} t) + b_n \cos(\sqrt{-\lambda_n} t) \Big) \sqrt{2} v_n. \end{cases} \tag{2.15}$$

Il est clair que $v_n(0) \neq 0$ pour tout $n = 1, 2, ...$ En s'inspirant de la technique utilisée dans [4], on démontre que les coefficients a_n et b_n sont nuls pour tout $n = 1, 2, ..$ et donc en vertu de (2.15) la solution $(\tilde{y}(t), \tilde{y}_t(t))$ est nulle; ce qui implique que $(\tilde{\phi}_1, \tilde{\phi}_2)$ l'est aussi. Ceci termine la preuve de la stabilité asymptotique.

Preuve du Théorème 2: Supposons que $a(x)$ est monotone non croissante. Multiplions l'équation $(*)$ par $\phi y_x + C_0 y$ où ϕ est une fonction dans $W^{1,\infty}(0,1)$ et C_0 une constante positive qu'on déterminera ultérieurement(voir (2.17) et (2.25)). Après un calcul direct, il en résulte que:

$$\begin{aligned}
&\int_{T_1}^{T_2}\int_0^1 \left[\left(\frac{\phi_x}{2} - C_0\right) y_t^2 + \left(\frac{a}{2}\left(\frac{\phi}{a}\right)_x + C_0\right) a y_x^2 + \left(C_0 - \frac{\phi_x}{2}\right)\beta y^2\right] dx dt \\
&+\frac{\phi(1)}{2}\int_{T_1}^{T_2}\left[-y_t^2(1,t) - \frac{\epsilon_2}{a(1)} g^2\left(y_t(1,t)\right) + \beta y^2(1,t)\right] dt \\
&+\frac{\phi(0)}{2}\int_{T_1}^{T_2}\left[y_t^2(0,t) + \frac{\epsilon_1}{a(0)} f^2\left(y_t(0,t)\right) - \beta y^2(0,t)\right] dt \\
&= -\int_0^1 \left[\phi y_t y_x + C_0 y_t y\right]_{t=T_1}^{t=T_2} dx \\
&+C_0 \int_{T_1}^{T_2}\left[\epsilon_2 g\left(y_t(1,t)\right) y(1,t) - \epsilon_1 f\left(y_t(0,t)\right) y(0,t)\right] dt.
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Choisissons ϕ telle que:

$$\begin{cases} \phi_x = 2\left(C_0 + \delta\right), \\ \phi(0) = 0. \end{cases}$$

où δ est une constante positive (voir (2.29)).
Ce qui est équivalent à écrire

$$\phi(x) = 2\left(C_0 + \delta\right) x. \tag{2.17}$$

Compte tenu de (2.17), l'égalité (2.16) s'écrit:

$$\begin{aligned}
&\int_{T_1}^{T_2}\int_0^1 \left[\delta y_t^2 + \left(\frac{a}{2}\left(\frac{\phi}{a}\right)_x + C_0\right) a y_x^2 - \delta\beta y^2\right] dx dt \\
&+\left(C_0 + \delta\right)\int_{T_1}^{T_2}\left[-y_t^2(1,t) - \frac{\epsilon_2}{a(1)} g^2\left(y_t(1,t)\right) + \beta y^2(1,t)\right] dt \\
&= -\int_0^1 \left[2\left(C_0+\delta\right) x y_t y_x + C_0 y_t y\right]_{t=T_1}^{t=T_2} dx \\
&+C_0 \int_{T_1}^{T_2}\left[\epsilon_2 g\left(y_t(1,t)\right) y(1,t) - \epsilon_1 f\left(y_t(0,t)\right) y(0,t)\right] dt.
\end{aligned} \tag{2.18}$$

De l'inégalité de Young et la décroissance de l'énergie, on obtient l'inégalité suivante:

$$-\int_0^1 \left[2\left(C_0+\delta\right) x y_t y_x + C_0 y_t y\right]_{t=T_1}^{t=T_2} dx \le M_1 E(T_1), \tag{2.19}$$

avec

$$M_1 = \max\left(2\frac{C_0+\delta}{\sqrt{a_0}}, \frac{C_0}{\sqrt{\beta}}\right).$$

D'autre part, il est facile de vérifier que pour tout $\theta > 1$, on a:

$$\int_0^1 y^2(x,t)dx \le \left(\frac{\theta^2}{\theta^2-1}\right) y^2(1,t) + \frac{\theta^4}{\theta^2-1}\int_0^1 y_x^2(x,t)dx. \tag{2.20}$$

Ce qui implique que:

$$-\delta\beta\int_0^1 y^2(x,t)dx \ge -\left(\frac{\delta\beta\theta^2}{\theta^2-1}\right) y^2(1,t) - \frac{\delta\beta\theta^4}{a_0(\theta^2-1)}\int_0^1 a y_x^2(x,t)dx. \tag{2.21}$$

D'où d'après (2.18), (2.19) et (2.21) on a:

$$\begin{aligned}
&\int_{T_1}^{T_2}\int_0^1 \left[\delta y_t^2 + \left(\frac{a}{2}\left(\frac{\phi}{a}\right)_x + C_0 - \frac{\delta\beta\theta^4}{a_0(\theta^2-1)}\right) a y_x^2\right] dxdt \\
&+\left(C_0+\delta-\delta\frac{\delta\theta^2}{\theta^2-1}\right)\int_{T_1}^{T_2}\beta y^2(1,t)dt \\
&\le M_1E(T_1) + (C_0+\delta)\int_{T_1}^{T_2}\left[y_t^2(1,t) + \frac{\epsilon_2}{a(1)}g^2\left(y_t(1,t)\right)\right]dt \\
&+C_0\int_{T_1}^{T_2}\left[\epsilon_2 g\left(y_t(1,t)\right)y(1,t) - \epsilon_1 f\left(y_t(0,t)\right)y(0,t)\right]dt.
\end{aligned} \tag{2.22}$$

En utilisant (2.17) et la décroissance de $a(x)$, on peut déduire que:

$$\frac{a}{2}\left(\frac{\phi}{a}\right)_x + C_0 - \frac{\delta\beta\theta^4}{a_0(\theta^2-1)} \ge 2C_0 + \delta - \frac{\delta\beta\theta^4}{a_0(\theta^2-1)}. \tag{2.23}$$

Reportons (2.23) dans (2.22); il s'en suit que:

$$\begin{aligned}
&\int_{T_1}^{T_2}\int_0^1 \left[\delta y_t^2 + \left(2C_0 + \delta - \frac{\delta\beta\theta^4}{a_0(\theta^2-1)}\right) a y_x^2\right] dxdt \\
&+\left(C_0+\delta-\frac{\delta\theta^2}{\theta^2-1}\right)\int_{T_1}^{T_2}\beta y^2(1,t)dt \\
&\le M_1E(T_1) + (C_0+\delta)\int_{T_1}^{T_2}\left[y_t^2(1,t) + \frac{\epsilon_2}{a(1)}g^2\left(y_t(1,t)\right)\right]dt \\
&+C_0\int_{T_1}^{T_2}\left[\epsilon_2 g\left(y_t(1,t)\right)y(1,t) - \epsilon_1 f\left(y_t(0,t)\right)y(0,t)\right]dt.
\end{aligned} \tag{2.24}$$

On choisit C_0 assez grand tel que:

$$\begin{cases} 2C_0 + \delta - \dfrac{\delta\beta\theta^4}{a_0(\theta^2-1)} \geq \delta, \\ C_0 + \delta - \dfrac{\delta\theta^2}{\theta^2-1} \geq 3. \end{cases}$$

On prend par exemple

$$C_0 = \sup\left(\frac{\delta\beta\theta^4}{2a_0(\theta^2-1)}, 3 + \frac{\delta}{\theta^2-1}\right). \tag{2.25}$$

Par suite, (2.24) s'écrit:

$$\begin{aligned} &\int_{T_1}^{T_2}\int_0^1 \delta y_t^2 + \delta a y_x^2 \, dxdt + 3\beta\int_{T_1}^{T_2} y^2(1,t)dt \\ &\leq M_1 E(T_1) + (C_0+\delta)\int_{T_1}^{T_2}\left[y_t^2(1,t) + \frac{\epsilon_2}{a(1)} g^2\left(y_t(1,t)\right)\right]dt \\ &+C_0\int_{T_1}^{T_2}\left[\epsilon_2 g\left(y_t(1,t)\right)y(1,t) - \epsilon_1 f\left(y_t(0,t)\right)y(0,t)\right]dt. \end{aligned} \tag{2.26}$$

L'inégalité de Young implique que pour tout $C_3, C_4 > 0$, on a:

$$\begin{cases} C_0\epsilon_2 g\left(y_t(1,t)\right)y(1,t) \leq \dfrac{1}{2}\left[C_0^2\epsilon_2^2C_3^2 g^2\left(y_t(1,t)\right) + \dfrac{1}{C_3^2}y^2(1,t)\right], \\ -C_0\epsilon_1 f\left(y_t(0,t)\right)y(0,t) \leq \dfrac{1}{2}\left[C_0^2\epsilon_1^2C_4^2 f^2\left(y_t(0,t)\right) + \dfrac{1}{C_4^2}y^2(0,t)\right]. \end{cases} \tag{2.27}$$

De plus, il est facile de vérifier que:

$$y^2(0,t) \leq y^2(1,t) + \int_0^1\left[y^2(x,t) + \frac{1}{a_0} a y_x^2(x,t)\right]dx.$$

Ce qui implique d'après (2.20) que:

$$y^2(0,t) \leq \left(1 + \frac{\theta^2}{\theta^2-1}\right)y^2(1,t) + \frac{1}{a_0}\left(1 + \frac{\theta^4}{\theta^2-1}\right)\int_0^1 a y_x^2(x,t)dx.$$

En combinant cette dernière inégalité avec (2.27), on a:

$$\begin{aligned} &C_0\int_{T_1}^{T_2}\left[\epsilon_2 g\left(y_t(1,t)\right)y(1,t) - \epsilon_1 f\left(y_t(0,t)\right)y(0,t)\right]dt \\ &\leq \frac{1}{2a_0C_4^2}\left(1+\frac{\theta^4}{\theta^2-1}\right)\int_{T_1}^{T_2}\int_0^1 a y_x^2 dx + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{C_3^2} + \frac{1}{C_4^2}(1+\frac{\theta^2}{\theta^2-1})\right)\int_{T_1}^{T_2} y^2(1,t)dt \\ &+\frac{C_0^2}{2}\int_{T_1}^{T_2}\left[\epsilon_2^2C_3^2 g^2\left(y_t(1,t)\right) + \epsilon_1^2C_4^2 f^2\left(y_t(0,t)\right)\right]dt. \end{aligned}$$

Reportons l'inégalité ci-dessus dans (2.26); il découle que:

$$\begin{aligned}
&\int_{T_1}^{T_2}\int_0^1 \delta y_t^2 + \left(\delta - \frac{1}{2a_0C_4^2}(1+\frac{\theta^4}{\theta^2-1})\right) a y_x^2 \, dxdt \\
&+\left(3\beta - \frac{1}{2C_3^2} - \frac{1}{2C_4^2}(1+\frac{\theta^2}{\theta^2-1})\right)\int_{T_1}^{T_2} y^2(1,t)dt \\
&\leq M_1E(T_1) + \int_{T_1}^{T_2}\left[(C_0+\delta)y_t^2(1,t) + \left(\frac{(C_0+\delta)\epsilon_2}{a(1)} + \frac{C_0^2\epsilon_2^2C_3^2}{2}\right) g^2\left(y_t(1,t)\right)\right] dt \\
&+\frac{C_0^2\epsilon_1^2C_4^2}{2}\int_{T_1}^{T_2} f^2\left(y_t(0,t)\right) dt.
\end{aligned} \tag{2.28}$$

Prenons C_3 et C_4 assez grands tels que:

$$\begin{cases}
\delta - \dfrac{1}{2a_0C_4^2}\left(1+\dfrac{\theta^4}{\theta^2-1}\right) \geq \delta/2, \\
3\beta - \dfrac{1}{2C_3^2} - \dfrac{1}{2C_4^2}(1+\dfrac{\theta^2}{\theta^2-1}) \geq \beta/2.
\end{cases}$$

On pourra prendre

$$\begin{cases}
\delta = \dfrac{4\beta}{a_0}\left(1+\dfrac{\theta^4}{\theta^2-1}\right)\left(1+\dfrac{\theta^2}{\theta^2-1}\right)^{-1}, \\
C_3^2 \geq 1/\beta, \\
C_4^2 \geq \dfrac{1}{a_0\delta}\left(1+\dfrac{\theta^4}{\theta^2-1}\right).
\end{cases} \tag{2.29}$$

Donc (2.28) devient:

$$\begin{aligned}
&\int_{T_1}^{T_2}\int_0^1 \delta y_t^2 + \frac{\delta}{2} a y_x^2 \, dxdt + \frac{\beta}{2}\int_{T_1}^{T_2} y^2(1,t)dt \\
&\leq M_1E(T_1) + \int_{T_1}^{T_2}\left[(C_0+\delta)y_t^2(1,t) + \left(\frac{(C_0+\delta)\epsilon_2}{a(1)} + \frac{C_0^2\epsilon_2^2C_3^2}{2}\right) g^2\left(y_t(1,t)\right)\right] dt \\
&+\frac{C_0^2\epsilon_1^2C_4^2}{2}\int_{T_1}^{T_2} f^2\left(y_t(0,t)\right) dt.
\end{aligned}$$

Ce qui nous permet de conclure d'après l'hypothèse (H^+) que:

$$\begin{aligned}
&\int_{T_1}^{T_2}\int_0^1 \delta y_t^2 + \frac{\delta}{2} a y_x^2 \, dxdt + \frac{\beta}{2}\int_{T_1}^{T_2} y^2(1,t)dt \\
&\leq M_1E(T_1) + \int_{T_1}^{T_2}\left[M_2 y_t(0,t) f(y_t(0,t)) - M_3 y_t(1,t) g(y_t(1,t))\right] dt.
\end{aligned}$$

avec

$$M_2 = \frac{C_0^2\epsilon_1^2 C_4^2 k_2^2}{2k_1}, \quad M_3 = \frac{(C_0+\delta)}{k_3} + \frac{k_4^2}{k_3}\left(\frac{(C_0+\delta)\epsilon_2}{a(1)} + \frac{C_0^2\epsilon_2^2 C_3^2}{2}\right).$$

En réutilisant (2.20), on peut démontrer que:

$$\beta y^2(1,t) + \delta\int_0^1 a y_x^2 dx \geq M_4 \int_0^1 \beta y^2 + a y_x^2 dx,$$

où

$$M_4 = 4\beta\left(\frac{\theta^2}{\theta^2-1}+1\right)^{-1}\min\left(1/\beta, 1/\|a\|_\infty\right).$$

Sans perte de généralité, on suppose que $\epsilon_1\epsilon_2 \neq 0$. On déduit des deux dernières inégalités obtenues que

$$\int_{T_1}^{T_2} E(t)dt \leq \frac{M}{C}E(T_1),$$

où

$$C = \min(2\delta, M_4), \quad M = M_1 + \max\left(\frac{M_2}{\epsilon_1}, \frac{M_3}{\epsilon_2}\right).$$

Ceci, grâce à un résultat classique [10] (Théorème 8.1 p. 103) , entraîne

$$E(t) \leq \exp(1 - \frac{Ct}{K})E(0), \quad \forall t \geq \frac{M}{C}.$$

Pour le cas où $a(x)$ est monotone non décroissante, on démontre la stabilité exponentielle de la même manière que precédemment mais en choisissant ϕ telle que:

$$\begin{cases} \phi_x = 2\left(C_0+\delta\right), \\ \phi(1) = 0. \end{cases}$$

Preuve du Théorème 3: Soit ϕ^* la fonction réelle sur $[0,1]$ définie par:

$$\phi^*(x) = \int_0^x \exp\left(\int_\sigma^x \left|\frac{a_x}{a}\right| d\xi\right) d\sigma.$$

Il est clair que ϕ^* vérifie les propriétés suivantes:

$$\begin{cases} \phi(0) = 0, \quad \phi(x) > 0 \text{ pour } x \in (0,1], \\ \phi_x \geq 1, \quad a\left(\dfrac{\phi}{a}\right)_x \geq 1. \end{cases}$$

De la même façon que dans la preuve du Théorème 2, on peut aisément vérifier que le multiplicateur $\phi^* y_x + C_0^* y$ permet d'avoir le résultat suivant:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_{T_1}^{T_2}\int_0^1 \left[\phi_x^* y_t^2 + a\left(\frac{\phi^*}{a}\right)_x a y_x^2 + C_0^*\beta y^2\right] dxdt \\
&= \frac{\phi^*(1)}{2}\int_{T_1}^{T_2}\left[y_t^2(1,t) + \frac{\epsilon_2}{a(1)} g^2\left(y_t(1,t)\right) - \beta y^2(1,t)\right] dt \\
&+ \int_0^1 \left[-\phi^* y_t y_x - C_0^* y_t y - \frac{\alpha C_0^*}{2}\right]_{t=T_1}^{t=T_2} dx + \int_{T_1}^{T_2}\int_0^1 \left[C_0^* y_t^2 - \alpha\phi^* y_t y_x\right] dxdt \\
&+ \frac{1}{2}\int_{T_1}^{T_2}\int_0^1 \beta\left(\phi_x^* - C_0^*\right) y^2 dxdt - C_0^*\int_{T_1}^{T_2}\int_0^1 a y_x^2 dxdt \\
&+ C_0^*\int_{T_1}^{T_2}\left[\epsilon_2 g\left(y_t(1,t)\right) y(1,t) - \epsilon_1 f\left(y_t(0,t)\right) y(0,t)\right] dt.
\end{aligned}
\tag{2.30}
$$

Vu l'inégalité de Young et l'hypothèse (H^+), on a:

$$
\begin{aligned}
&C_0^*\int_{T_1}^{T_2}\left[\epsilon_2 g\left(y_t(1,t)\right) y(1,t) - \epsilon_1 f\left(y_t(0,t)\right) y(0,t)\right] dt \\
&\leq \frac{C_0^*}{2}\int_{T_1}^{T_2}\left(\frac{\epsilon_1^2 k_2^2}{k_1} y_t(0,t) f(y_t(0,t)) - \frac{\epsilon_2^2 k_4^2}{k_3} y_t(1,t) g(y_t(1,t)\right) dt \\
&+ \frac{1}{2}\int_{T_1}^{T_2}\left(y^2(1,t) + y^2(0,t)\right) dt.
\end{aligned}
$$

Or,

$$
\frac{1}{2}\int_{T_1}^{T_2}\left(y^2(1,t) + y^2(0,t)\right) dt \leq 2\int_0^1 \left(y^2 + \frac{1}{a_0} a y_x^2\right) dx.
$$

En utilisant les propriétés de ϕ^* et en reportant les deux dernières inégalités dans (2.30), il découle que

$$
\begin{aligned}
&\int_{T_1}^{T_2} E(t) dt \leq K E(T_1) \\
&+ \int_{T_1}^{T_2}\int_0^1 \left[\frac{\beta}{2}\left(\phi_x^* - C_0^*\right) + 2\right] y^2 + \left(-C_0^* + \frac{2}{a_0} + \frac{\alpha\phi^*(1)}{2a_0}\right) a y_x^2 dxdt.
\end{aligned}
$$

où K est une constante positive.
Prenons C_0^* tel que

$$
C_0^* = \sup\left(1, \|\phi_x\|_\infty + 4/\beta, \frac{4 + \alpha\phi(1)}{2a_0}\right).
$$

Dès lors, la stabilité exponentielle est facilement obtenue.

Remarque 2 *: Dans certains problèmes physiques, on rencontre des densités de masse $a(x)$ qui ne sont monotones que par morceaux. Citons par exemple la densité de masse donnée par l'expression suivante:*

$$a(x) = \sqrt{p^2 + (x - 1/2)^2} \qquad \forall x \in (0,1).$$

où p est une constante positive.
Il est clair que $a(x)$ est monotone sur chacun des intervalles $(0,1/2)$ et $(1/2,1)$. Il est donc intéressant de traiter ce genre de cas.
Supposons alors qu'il existe $x_0 \in (0,1)$ tel que $a(x)$ est monotone croissante (resp. décroissante) sur $(0,x_0)$ (resp. sur $(x_0,1)$). On définit sur [0,1] une fonction continue θ telle que:

$$\begin{cases} \theta_x = 2\,(C_1 + \delta_1)\,, \\ \theta(x_0) = 0. \end{cases}$$

avec C_1 et δ_1 deux constantes positives.
On remarque que ϕ est srictement négative(resp. positive) sur $(0,x_0)$ (resp. sur $(x_0,1)$). Avec un choix approprié de C_1 et δ_1, on démontre dans ce cas que le multiplicateur $\theta y_x + C_1 y$ permet d'avoir la stabilité exponentielle. La preuve est identique à celle du Théorème 2.

Références

[1] B. d'Andrea-Novel, F. Boustany, B. Rao, *Feedback stabilisation of a hybrid PDE-ODE system: Application to an overhead crane*, MCSS 7 (1994) 1-22.

[2] H. Brezis, *Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert*, North-Holland, Amsterdam, London, (1973).

[3] M. Cherkaoui, *Sur la stabilisation d'une poutre déformable en torsion ou en fléxion par une classe de contrôle frontière*, Thèse, Université de Nancy1 (1994).

[4] F. Conrad; M.Pierre, *Stabilisation of Euler-Bernoulli beam by nonlinear boundary feedback*, Rapport de recherche INRIA 1235 (1990).

[5] F. Conrad, B. Rao, *Decay of solutions of the wave equation in a star-shaped domain with nonlinear boundary feedback*, Asymptotic Analysis 7 (1993) 159-177.

[6] C. M. Dafermos; M. Slemrod, *Asymptotic behavior of non linear contractions semigroups*, J. Func. Anal 14 (1973) 97-106.

[7] A. Haraux, *Systèmes dynamiques dissipatifs et applications* , collection RMA(17) (1991).

[8] S. Icart, J. Leblond, C.Samson, *Some results on feedback stabilisation of a one-link flexible arm*, rapport de recherche INRIA-Sophia Antipolis 1682 (1992).

[9] V. Jurdjevic; J. P. Quin, *Controlability and stability*, J. Diff. Equations, vol28, no.3 (1978) 381-389.

[10] V. Komornik, *Exact controllability and stabilisation. The multiplier method*, Masson and John Wiley (1994).

[11] V. Mikhaïlov, *Equations aux dérivées partielles*, Mir, Moscou (1980).

[12] B. Rao, *Decay estimate of solution for hybrid system of flexible structures*, Euro. J. Appl. Math 4 (1993) 303-319.

[13] A. Zeidler, Non linear functional analysis and its applications, vol2. Springer Verlag, New york (1986).

Unit´e de recherche INRIA Lorraine, Technop ˆole de Nancy-Brabois, Campus scientifique,
615 rue du Jardin Botanique, BP 101, 54600 VILLERS LÈS NANCY
Unit´e de recherche INRIA Rennes, Irisa, Campus universitaire de Beaulieu, 35042 RENNES Cedex
Unit´e de recherche INRIA Rh ˆone-Alpes, 655, avenue de l'Europe, 38330 MONTBONNOT ST MARTIN
Unit´e de recherche INRIA Rocquencourt, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 LE CHESNAY Cedex
Unit´e de recherche INRIA Sophia-Antipolis, 2004 route des Lucioles, BP 93, 06902 SOPHIA-ANTIPOLIS Cedex

Éditeur
INRIA, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 LE CHESNAY Cedex (France)
ISSN 0249-6399